Representations of Finite Groups and K-theory (Cohomology theory of finite groups)

河合, 浩明

数理解析研究所講究録
1140 巻 2000 年 145-151

Representations of Finte Groups and K-theory

熊本工業大学　河合浩明　(Hiroaki Kawai)

Abstract

The purpose of this report is to set down the basic relations between representations of finite groups and K-theory (Atiyah's K-theory, equivariant K-theory and Quillen's K-theory). In particular, we give a elementary proof for Rector's theorem which is the modular version of Atiyah's completion theorem. For the reason giving the proof, I think Rector's proof contains not a little abbreviations. As a recent topic, we write down Thévenaz's results [16] in the form of our purpose.

1. Atiyah-Hirzebruch's spectral 系列 と Thévenaz's remark

vector bundules は vector spaces の拡張と考えられる. たとえば vector spaces の圏の間の functor T は, 一部を除き, fibre 間 の対応が T となる vector bundules の圏の間の functor に拡張できる [8, ch.5, 6.2]. そこで空間 X 上の complex vector bundules の集合は direct sum と tensor product により semi-ring となり, その Grothendieck 群を $K^0(X)$ とかく. 同様にして群 G の作用をもつ G-空間 X 上の G-complex vector bundules から成る semi-ring の Grothendieck 群を $K^0_G(X)$ とかく [2], [15]. 以後 G は有限群とする.

X が基点 x_0 をもつとき, $\widetilde{K}^0(X) = Kernel(K^0(X) \to K^0(x_0))$ とおく. この時 $\widetilde{K}^0(X)$ は $K^0(X)$ の ideal であり $K^0(X) = \mathbf{Z} \oplus \widetilde{K}^0(X)$ である. X を compact connected な空間とすると [2, p45] におけるように,

$$\widetilde{K}^0(X) \simeq \lim_{\to}\{X\text{上の } n \text{ 次元 } complex\ vector\ bundules\} \simeq \lim_{\to}[X,\ BU(n)] \simeq [X,\ BU]$$

ここで, $\lim\limits_{\to}$ は n についての帰納的極限, $BU(n)$ は n 次の unitary 群 $U(n)$ の分類空間, $BU = \lim\limits_{\to} BU(n)$ ($U = \lim\limits_{\to} U(n)$ の分類空間), $\simeq$ は bijection (演算については 3 節を参照),
$[\ ,\ ]$ は base point free な連続写像の homotopy 類の集合を表す. これらの記号は以後も同じ意味で用いる.
上の $\widetilde{K}^0(X)$ の表現と homotopy 論の Puppe の完全系列を思い起こせば次の定義は自然であろう.

定義 1.1. compact 空間の対 $Y \subset X$ と $n \geq 0$ に対し, $\widetilde{K}^{-n}(X/Y) = \widetilde{K}^0(S^n(X/Y))$ と定め, これを $K^{-n}(X,Y)$ と表す. この定義に従って $K^{-n}(X) = K^{-n}(X,\phi)$ すなわち $\widetilde{K}^0(S^n(X_+))$, X_+は形式的な基点の追加, と定義する. ($K^0(X) \cong \widetilde{K}^0(X_+)$ が成り立つので上の定義と矛盾しない. また X が基点をもつ場合 $n \geq 1$ では $K^{-n}(X)$ は用いない). ところで Bott の周期定理より $K^{-n}(X,Y) \cong K^{-n-2}(X,Y)$ となるので任意の整数 n に対し, n が偶数のとき $K^n(X,Y) = K^0(X,Y)$, n が奇数のとき $K^n(X,Y) = K^{-1}(X,Y)$ と同一視して

$$K^*(X,Y) = K^0(X,Y) \oplus K^1(X,Y)\ (\text{ring となる})\ \text{とおく}.$$

equivariant K-theory においてもまったく同じ結果が成り立ち [15], $K^*_G(X,Y) = K^0_G(X,Y) \oplus K^1_G(X,Y)$ とおく.

以後断らなければ、X は有限 CW-複体 とする.

定理 1.2(Atiyah - Hirzebruch [3]). $K^*(X)$ の filtration $K_p^*(X) = Kernel(K^*(X) \to K^*(X^{p-1})),_{0 \le p < \infty}$, ($X^{p-1}$は X の p-1 切片) に対して,

$E_2 = H^*(X, \mathbf{Z}) \Rightarrow K^*(X)$ となる spectral 系列 E_r $,_{1 \le r \le \infty}$, が存在する.

定理 1.5 の説明のために証明をつける. 証明の方針は filtered (co)chain complex A の spectral 系列の公理化 [7, ch.15, 7] による. $H(p, q) = K^*(X^{q-1}, X^{p-1}), p \le q$, (cochain complex の場合の cohomology 群 $H(F^pA/F^qA)$ にあたる) とおき、 cochain complex の場合とまったく同様に spectral 系列 $\{ E_{r,1 \le r \le \infty} \}$ が定義される. この時 K-群の完全系列より $E_\infty^p \cong K_p^*(X)/K_{p+1}^*(X)$ となる. さらに Xが有限より収束条件も成り立ち $\lim_{r \to \infty} E_r^p = E_\infty^p$.
定義より $E_1^p = H(p, p+1) = K^*(X^p, X^{p-1})$. ところで X^p/X^{p-1} は p-cells の wedge sum に分解し、簡約 K-群 $\tilde{K}^*$ は wedge sum に関して加法的 ([8, ch.9, 3.2]) であるから $E_1^p = \sum_{X の\ p\text{-}cells} \tilde{K}^*(S^p)$ となる. ここで,

$\tilde{K}^i(S^p) = 0 \quad for\ i \ne p\ (\text{mod}2), \qquad \tilde{K}^i(S^p) = \mathbf{Z} \quad for\ i = p\ (\text{mod}2)$

であるから $E_1^p = \sum_{X の\ p\text{-}cells} \mathbf{Z}$. さらに $d_1 : E_1^p \to E_1^{p+1}$ と coboundary operator が一致していることより $E_2^p = H^p(X, \mathbf{Z})$.

有限群 G の分類空間 BG は連結 CW-複体であるが有限とは限らない. そこで $BG = \varinjlim BG^n$, BG^n は n 切片, と見て BG の K-群を $\mathcal{K}^*(BG) = \varprojlim K^*(BG^n)$ と定める. このとき射影的極限の議論 ([1, 5.2]) より,

定理 1.3(Atiyah [1]). $\mathcal{K}^*(BG)$ の filtration $\mathcal{K}_p^*(BG) = \varprojlim K_p^*(BG^n)(= kernel(\mathcal{K}^*(BG) \to \mathcal{K}^*(BG^{\ p-1})),_{0 \le p < \infty}$, に対して,

$E_2 = H^*(G, \mathbf{Z}) \Rightarrow \mathcal{K}^*(BG)$ となる spectral 系列 E_r $,_{1 \le r \le \infty}$, が存在する.

定理 1.2 の spectral 系列 $\{ E_r \}$ に対し $\{ E_r \otimes \mathbf{Q} \}$ は $E_2 \otimes \mathbf{Q}$ で stop する. さらに定理 1.2 の証明と同様な議論により $H^{even}(X, \mathbf{Q}) \cong K^0(X) \otimes \mathbf{Q}$, $H^{odd}(X, \mathbf{Q}) \cong K^1(X) \otimes \mathbf{Q}$ となる [3, 2.4]. すなわち

Xの Euler 標数 $\chi(X) = \dim\ (K^0(X) \otimes \mathbf{Q})$ - $\dim\ (K^1(X) \otimes \mathbf{Q})$.

そこで次の定義は自然であろう.

定義 1.4. compact G-空間 Xの equivariant Euler 標数 $\chi_G(X) = \dim\ (K_G^0(X) \otimes \mathbf{Q})$ - $\dim\ (K_G^1(X) \otimes \mathbf{Q})$ と定める.

次の Segal の定理は一般の compact 空間で成り立つが有限 G-単体複体 ([6] での G-単体複体の定義に順序の条件をいれる) の場合は定理 1.2 の証明を直接拡張して示される.

定理 1.5(Segal [15] - Thévenaz [16]). Δ を有限 G-単体複体とする. $K_G^*(|\Delta|)$, $|\Delta|$ は Δ の幾何学的実現 , の filtration $K_{G,p}^*(|\Delta|) = Kernel(K_G^*(|\Delta|) \to K_G^*(|\Delta|^{p-1}),_{0 \le p < \infty}$, に対して,

$E_2 = H^*(|\Delta|/G, \mathcal{R}) \Rightarrow K_G^*(|\Delta|)$ となる spectral 系列 $E_{r,1 \le r \le \infty}$, が存在する.

ここで, $\mathcal{R}$ は Δ 上の G-equivariant local coefficient system [6, 7.1] から得られる orbits set Δ/G (順序単体複体としてよい [16]) 上の cefficient system.

証明. 定理 1.2 とまったく同様にして $E_\infty^p \cong K_{G,p}^*(|\Delta|)/K_{G,p+1}^*(|\Delta|)$, $\lim_{r\to\infty} E_r^p = E_\infty^p$ さらに $E_1^p = K_G^*(|\Delta|^p, |\Delta|^{p-1}) = \tilde{K}_G^*(|\Delta|^p/|\Delta|^{p-1})$. G_σ を単体 σ の固定部分群とする (仮定よりσの各頂点に自明に作用する). またΔ_pを p 単体の全体、Δ_P/G を G-orbits の代表系とすると,

$$|\Delta|^p/|\Delta|^{p-1} = \bigvee_{\sigma\in\Delta_p/G} (\bigvee_{g\cdot\in G/G_\sigma} g\cdot S^p) = \bigvee_{\sigma\in\Delta_p/G} \widetilde{Ind}_{G_\sigma}^G(S^p).$$

ところで $\tilde{K}_G^*(\widetilde{Ind}_{G_\sigma}^G(S^p)) \cong \tilde{K}_{G_\sigma}^*(S^p)$ ([16, Lemma 1.1]), さらに後ろの定理 2.2 より

$$E_1^p \cong \oplus_{\sigma\in\Delta_p/G}\tilde{K}_{G_\sigma}^*(S^p) \cong \oplus_{\sigma\in\Delta_p/G}\tilde{K}^*(S^p)\otimes R(G_\sigma) = \oplus_{\sigma\in\Delta_p/G}R(G_\sigma).$$

そこで単体 σ 上の値として $R(G_\sigma)$ をとる coefficient system $\mathcal{R}$ を考えれば, E_1 は coboundary maps も込めて cochain complex $C^*(\Delta/G,\mathcal{R})$ と一致する.

定理 1.6(Baum - Connes [5])

$$K_G^0(|\Delta|)\otimes \mathbf{C} \cong \oplus_{g\in\Lambda}H^{even}(|\Delta^g|/C_G(g);\mathbf{C})$$
$$K_G^1(|\Delta|)\otimes \mathbf{C} \cong \oplus_{g\in\Lambda}H^{odd}(|\Delta^g|/C_G(g);\mathbf{C})$$

ここで Λ は G の共役類の代表元の集合, Δ^gは g-fixed points からなる部分複体.
従って 定義 1.4 の上で述べた non-equivariant での collapse Theorem より,

$$K_G^i(|\Delta|)\otimes \mathbf{C} \cong \oplus_{g\in\Lambda}K^i(|\Delta^g|/C_G(g)),\ (i=0,1).$$

この定理より Thévenaz は Alperin 予想 , 正確には Knörr - Robinson 予想 , の言い換えをおこなっている. すなわち上の定理より,

$$\chi_G(|\Delta|) = \sum_{g\in\Lambda}\chi(|\Delta^g|/C_G(g)) \ \ (= \sum_{g\in\Lambda}\sum_{\sigma\in\Delta^g/C_G(g)}(-1)^{dim(\sigma)}).$$

一方, Brown 複体 Δ において Knörr - Robinson 予想 :

$$k(G) - z_p(G) = \sum_{\sigma\in\Delta/G}(-1)^{dim(\sigma)}k(G_\sigma) \ \ (= \sum_{\sigma\in\Delta/G}(-1)^{dim(\sigma)}\sum_{x\in G_\sigma}\frac{1}{|G_\sigma : C_G(x)|}).$$

ここで $k(G)$ は単純 $\mathbf{C}G$ 加群の個数, $z_p(G)$ は defect 0 の blocks の個数.

命題 1.7(Thévenaz). 上の２つの式の右辺は $\sum$ の入れ替えにより一致する.

2. Atiyah's K-theory と ordinary 表現 – Quillen's K-theory と modular 表現

FG-加群, Fは体, の Grothendieck 環を $R_F(G)$, $F=\mathbf{C}$ のときは単に $R(G)$ と記す. $I(G) = Kernel(R_F(G)\to\mathbf{Z}$; FG-加群 $M\mapsto$ dimM) に関する $I(G)$-adic completion $\varprojlim R_F(G)/I(G)^n$ を $\widehat{R_F}(G)$ と記す (これは $I(G)$-adic topology に関しての通常の意味での完備化である [4, ch. 10]). 1 節で述べたように, $\mathcal{K}^0(BG) = \varprojlim K^0(BG^n) \simeq \varprojlim[BG^n,\mathbf{Z}\times BU]$. さらに Milnor の完全系列より $\mathcal{K}^0(BG)\simeq[BG,\mathbf{Z}\times BU] = \mathbf{Z}\times[BG,BU]$ ([6, 2.5]). また $BU(n) = BGL_n(\mathbf{C})$ [8, ch.

7, 7.4] より $BU = BGL(\mathbf{C})$, $GL(\mathbf{C}) = \varinjlim GL_n(\mathbf{C})$, となる.

定理 2.1 (Completion).

(i) (Atiyah) $\widehat{R(G)} \cong \mathcal{K}^0(BG) = \mathbf{Z} \times [BG, BGL(\mathbf{C})]$ as rings. さらに $\mathcal{K}^1(BG) = 0$.

(ii) (Rector) $\widehat{R_{F_q}}(G) \cong \mathbf{Z} \times [BG, BGL(F_q)^+]$ as rings (ここで F_q は標数 p の有限体で $p||G|$, $(\quad)^+$ は Quillen's plus constraction).

上の (i) (ii) の同型は次の対応で与えられている.

(2.2) $(\rho : G \to GL_n(\mathbf{C})\ ) \longmapsto (n, BG \to^{B\rho} BGL_n(\mathbf{C}) \to BGL(\mathbf{C})\ )$.

(2.3) $(\bar{\rho} : G \to GL_n(F_q)\ ) \longmapsto (n, BG \to^{B\bar{\rho}} BGL_n(F_q) \to BGL(F_q) \to BGL(F_q)^+\ )$.

Rector の証明はギャップが多い様だが, 結果は正しい [18, Introduction]. そこで後半で F_q が Quillen の定理 3.2 の条件をみたす場合に semi-rings としての同型を基本的な方法で与えてみた.

定理 2.2 (K-theory and equivariant K-theory).

(i)(Atiyah - Segal) $R(G) \otimes K^0(X) \cong K^0_G(X)$ as rings

ここで X は G の作用が trivial な compact 空間 .

(ii)(Quillen) $R_{F_q}(G) \otimes K_i^Q(modF_q) \cong K_i^Q(modF_qG)$, $i \geq 1$, as groups

ここで F_q は G の分解体、$K_i^Q(modA)$ は exact category としての $modA$ (有限生成 A-加群のなす圏) の Quillen K-group. さらに上の $BGL(F_q)^+$ を用いると $K_i^Q(modF_q) = \pi_i(BG(F_q)^+)$ と表せる.

<u>証明</u> (i) は [15, 2.2], (ii) は devissage Theorem と exact category の K-theory の基本性質による ([13], [9, ch.2, §1] 参照).

注意 2.3 (spectra との関係). 定理 2.1 の右辺の空間 $\mathbf{Z} \times BGL(\mathbf{C}) = \mathbf{Z} \times BU$, $\mathbf{Z} \times BGL(F_q)^+$ は多くの内容を含んでいると思う. $n \geq 0$ において $KU(n) = \mathbf{Z} \times BU\ for\ n = 0$ (mod2), $=$ ΩBU for n = 1(mod2) と定めると original な Bott 周期定理 [6, 2.5.4] より, $KU(n)$ は Ω-spectrum となる. また任意の環 A に対して $K_A(n) = K_0(S^nA) \times BGL(S^nA)^+$ $(n \geq 0)$ と定めるとやはり周期性に関する結果より Ω-spectrum となる (証明, 記号等は [9, ch.3, 4.16] 参照). さらに J. P. May の spectra との関連については May の歴史的解説 [10] を参照.

注意 2.4 (表現の Chern 類). complex vector bundle の Chern 類は対応する classifying map を用いて定義することもできる [6, 2.6]. 同様に定理 2.1 の対応を用いて表現の Chern 類が定義される.

(i) $H^{even}(BGL_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[c_1,\ c_2, \cdots,\ c_n]$ である。$B\rho : BG \to BGL_n(\mathbf{C})$ を表現 $\rho : G \to GL_n(\mathbf{C})$ から得られる分類空間の間の map とする. このとき $\mathbf{c_i}(\rho) = (B\rho)^*(c_i)$, $1 \leq i \leq n$, を表現 ρ の Chern 類と定義する ([6, 2.6], [17, ch.6, Flat bundles]).

(ii) $H^{even}(BGL_n(\bar{F}_p), \mathbf{Z}/l) = \mathbf{Z}/l[\bar{c}_1,\ \bar{c}_2, \cdots,\ \bar{c}_n]$、ここで $\bar{F}_p$ は標数 p の代数的閉体で l は p と異なる素数 $(H^k(BGL_n(\bar{F}_p), \mathbf{Z}/p) = 0, 0 < k,$ となる). $B\bar{\rho} : BG \to BGL_n(\bar{F}_p)$ を表現 $\bar{\rho} : G \to GL_n(\bar{F}_p)$ から得られる map とする. このとき $\mathbf{c_i}(\bar{\rho}) = (B\bar{\rho})^*(\bar{c}_i)$, $1 \leq i \leq n$, を表現 $\bar{\rho}$ の chern 類と定義する ([17, ch.9]).

3. Rector の定理の証明

定義 3.1. λ-環 R において, Adams 作用素 $\psi^k : R \to R$ を次の様に定義する.

$$\psi^k(x) = N_k(\lambda^1(x), \lambda^2(x), \cdots, \lambda^k(x)),$$

ここで N_kは kth Newton 多項式, すなわち $x_1^k + x_2^k + \cdots + x_k^k = N_k(e_1, e_2, \cdots, e_k)$, e_iは基本対称式 (この定義の仕方については [8, ch.12, Remark 2.4]).

$R(G)$ と $K^0(X)$, Xは compact 空間, はλ-環である. さらに, $\psi^k(\tilde{K}^0(X)) \subset \tilde{K}^0(X)$([8, ch.12]). ところで $\tilde{K}^0(X) = [X, BU]$ (ここでは演算は考えないので $=$ と書く) であるから, Yoneda の補題より natural transformation $\psi^k : [X, BU] \to [X, BU]$ は map $\sigma^k : BU \to BU$ によって表現される (BUは compact ではないが BUの CW-分解を用いて定義される [6, 2.5]). さらに, $\tilde{\mathcal{K}}^0(BG) = \varprojlim[BG^n, BU] = [BG, BU]$ より $\tilde{\mathcal{K}}^0(BG)$ 上定義される Adams 作用素も σ^k によって表現される. 次の Quillen の定理 [11], [12] が証明の基本となる.

定理 3.2 (Quillen). q を p 巾で, $|G| = p^r h$ $(p \nmid h)$ のとき $p^r | q$ かつ $h | q-1$ とする (よって, $\chi \in R(G)$ に対し $\chi(x^q) = \chi((x \text{ の } p-reg.part)^q) = \chi(x \text{ の } p-reg.part)$, さらに後半の条件より F_qは G の分解体).

(i) $R_{F_q}(G) \cong R(G)^{\psi^q}$ as rings, $R(G)^{\psi^q}$ は固定元からなる部分環.

(ii) $[BG, F\sigma^q] \simeq [BG, BU]^{\sigma^q}$, ここで $F\sigma^q = \{(x, \tilde{p}) \in BU \times (BU\text{の } path\ space) \mid x$ と $\sigma^q(x)$ が $path$ $\tilde{\mathrm{p}}$ で結ばれる $\}$, $[\ \ ,\ \ ]^{\sigma^q}$ は固定元.

(iii) $BGL(F_q)^+$ と $F\sigma^q$は homotopy 同値.

それぞれの同型を与える map は (i) は Brauer lifting, (ii) は projection $(x,p) \mapsto x$, (iii) については後で説明. 以後 q は定理 3.2 の条件をみたすとする.

$$\begin{array}{ccc} R(G)^{\psi^q} & \longrightarrow & \mathcal{K}^0(BG)^{\psi^q} = (\mathbf{Z} \oplus \tilde{\mathcal{K}}^0(BG))^{\psi^q} \simeq \mathbf{Z} \times [BG, BU]^{\sigma^q} \\ \| \wr & & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad | \wr \\ R_{F_q}(G) & \dashrightarrow & [BG, \mathbf{Z} \times BGL(F_q)^+] = \mathbf{Z} \times [BG, BGL(F_q)^+]\,. \end{array} \tag{3.3}$$

ここで, 上の式の arrow は flat bundle homomorphism $\alpha : R(G) \to \mathcal{K}^0(BG)$, $\mathbf{C}G-$ 加群 $M \mapsto EG \times_G M$ ([6, 2.3.3]) の制限, α が λ-環準同形であるから well defined である. さらに $\mathbf{Z}^{\psi^q} = K^0(basepoint\ x_0)^{\psi^q} = K^0(x_0) = \mathbf{Z}$, 垂直の同型は定理 3.2 による.

命題 3.4. $\widehat{R_{F_q}}(G) \cong \mathcal{K}^0(BG)^{\psi^q}$.

<u>証明</u>. 同型写像 $R\widehat{(G)} \cong \mathcal{K}^0(BG)$ は $\bar{\alpha} : R(G)/I(G)^n \to \mathcal{K}^*(BG)/\mathcal{K}^*_{2n}(BG)$ の射影的極限によって与えられている [1]. ここで $\psi^q(I(G)) \subset I(G)$ かつ $\psi^q(\mathcal{K}^*_{2n}(BG)) \subset \mathcal{K}^*_{2n}(BG)$ より両側の極限に Adams 作用素が定義できて, $\bar{\alpha}$ と compatible であるから $(R\widehat{(G)})^{\psi^q} = (\varprojlim R(G)/I(G)^n)^{\psi^q} \cong (\varprojlim \mathcal{K}^0(BG)/\mathcal{K}^0_{2n}(BG))^{\psi^q} = (\varprojlim \mathcal{K}^0(BG)/\mathcal{K}^0_n(BG))^{\psi^q} = \mathcal{K}^0(BG)^{\psi^q}$ となる. さらに, $R(G)^{\psi^q} = \psi^q(R(G))$ であり ψ^q が idempotent であることに注意すると, [1, 3.11] より完全系列 $0 \to ((1-\widehat{\psi^q})R(G)) \to R\widehat{(G)} \to (R\widehat{(G)^{\psi^q}}) \to 0$ が得られる ($(R\widehat{(G)^{\psi^q}})$ は $R(G)^{\psi^q}$ の subspace topology に関しての completion). よって $(R\widehat{(G)^{\psi^q}}) \cong (R\widehat{(G)})^{\psi^q}$. また [14, 3.5] よ

り $(\widehat{R(G)}^{\psi^q}) \cong \widehat{R_{F_q}(G)}$. したがって $\widehat{R_{F_q}(G)} \cong K^0(BG)^{\psi^q}$ となる.

(2.2), (2.3) の対応と, その可換性を示す前にいくつかの注意を述べる. まず完備化する前の $R(G)$, $R_{F_q}(G)$ からの写像が well defined となることを示さなければならない. (2.2) は明らかであるが (2.3) についても Quillen の結果より正しいようである [18, Introduction] (確認できない部分がある). さらに 2 つの注意を準備する. ここで空間 X は compact 空間.

注意 3.5 $GL(A)$, A は環, の direct sum は checkerboard construction と呼ばれる方法で定義される [9, ch.2, §2]. しかし, この direct sum と classical direct sum (i.e. $\alpha \in GL_n(A)$, $\beta \in GL_m(A)$ に対し、$\alpha \oplus \beta = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$) は $GL(A)$ で共役となる. そこで [9, ch.2, 2.19] より対応する 2 つの準同形 f, f' : $GL_n(A) \times GL_m(A) \to GL(A)$ から得られる maps Bf, Bf' : $B(GL_n(A) \times GL_m(A)) \to BGL(A)$ は homotopic (さらに $BGL(A) \to BGL(A)^+$ をつないだときは base-point preserving homotopic となる). ところで Bf'から得られる map $BGLn(A) \times BGLm(A) \approx B(GL_n(A) \times GL_m(A)) \to^{Bf'} BGL(A)$ は vector bundles の Whitney sum を表現しているので bijection $\widetilde{K}^0(X) \simeq [X, BGL(\mathbf{C})]$ は sum と compatible となる.

注意 3.6 $\widetilde{K}^0(X)$ の任意の元 $\xi - \eta$ に対して, $\eta \oplus \eta'$ が trivial bundle となる vector bundle η' が存在する. ξ を表現する map を $\widehat{\xi} : X \to BGL_n(\mathbf{C})$, η' を表現する map を $\widehat{\eta'} : X \to BGL_m(\mathbf{C})$ とするとき $\widetilde{K}^0(X) \simeq [X, BGL(\mathbf{C})]$ において $\widehat{\xi} \oplus \widehat{\eta'}\ in[X, BGL(\mathbf{C})]$ (注意 3.5) が $\xi - \eta$ を表現している ([8] 参照).

<u>(2.2) は図 (3.3) の 上の式の対応を与えている</u>.

(証明) $\alpha : R(G) \to \mathbf{Z} \times \widetilde{K}^0(BG)$ は n 次元 $\mathbf{C}G$-加群 M に対し, $M \mapsto (n, \alpha(M) - \theta^n)$, θ^nは n 次の trivial bundle, と分解される. ところで $\alpha(M) = EG \times_G M$ は $B\rho : BG \to BGL_n(\mathbf{C})$, ρ はMの表現, によって表現されるから ([6, 2.6]), 注意 3.6 より (2.2) の対応が得られる. (注意 3.6 では X は compact であるが $\alpha(M) = \varprojlim \alpha(M)_n$, $\alpha(M)_n$ は $\alpha(M)$ から誘導される compact 空間 BG^n 上の vector bundle。よって 3.6 が適用できる).

<u>(2.3) は図 (3.3) の下の式の対応を与えている</u>.

(証明) 定理 3.2 の (i), (ii) より $R_{F_q}(G)$ から $[BG, F\sigma^q]$ への写像が定義できるが $G = GL_n(F_q)$ の場合に適用して canonical 表現 $I : GL_n(F_q) \to GL_n(F_q)$ (すなわち identity), の像 $\phi_n : BGL_n(F_q) \to F\sigma^q$ を得る. このとき Milnor の完全系列より $\phi = \varprojlim \phi_n : BGL(F_q) \to F\sigma^q$ が定まり, これを $BGL(F_q)^+$まで持ち上げた map によって定理 3.2 (iii) の homotopy 同値が得られる.

ところで, G の表現 $G \to GL_n(F_q)$ は canonical 表現の (雑に言って) 制限と見れるので上の対応をくわしく見ていく. n 次元 canonical 表現 I の Brauer lift は $\mathbf{C}G$-加群の差 $W - U$ で表され, α による像は $(n, \alpha(W) - (\alpha(U) + \theta^n))$ と分解する. このとき ω を W の表現とすると, $\alpha(W)$ は $B\omega : BGL_n(F_q) \to BGL_{\text{dim. of W}}(\mathbf{C}) \to BGL(\mathbf{C})$ によって表現される. 一方, 注意 3.6 の η' にあたる vector bundle $\alpha(U)'$ ($\varprojlim$ で与えられる) を表現する $\widehat{\psi} : BGL_n(F_q) \to BGL_{\text{dim. of }\eta'}(\mathbf{C}) \to BGL(\mathbf{C})$ がとれる. このとき ϕ_n は $i \circ (B\omega \oplus \widehat{\psi})$, i は inclusion, と表される.

ここまで $G = GL_n(F_q)$ で考えてきたが, $R_{F_q}(G) \to [BG, F\sigma^q]$ の場合にもどる. このとき G

の表現 $\bar{\rho}: G \to GL_n(F_q)$ に対し上の $\alpha(W)$, $\alpha(U)'$ にあたる vector bundles はこれらから $B\bar{\rho}: BG \to BGL_n(F_q)$ に従って誘導されたものとなる．ゆえに，対応する $[BG, F\sigma^q]$ の元は $i \circ (B\omega \oplus \hat{\psi}) \circ B\bar{\rho}$ である．以上のことから $R_{F_q}(G) \to \mathbf{Z} \times [BG, BGL(F_q)^+]$ は $\rho \mapsto (n, BG \to^{B\bar{\rho}} BGL_n(F_q) \to BGL(F_q) \to BGL(F_q)^+)$ で与えられていて，図 (3.3) は可換となる．
注意 3.5 における前者の direct sum により $[BG, BGL(F_q)^+]$ に和が定義されるが注意 3.5 で述べたことより (2.3) の対応は direct sum と compatible となる．さらに，Loday's product により $[BG, BGL(F_q)^+]$ に積が定義され (2.3) は積とも compatible となる ([9, ch.3, §4])．また (2.2) の対応は vector bundule の対応を考えれば環準同型である．

参考文献

[1] M.F. Atiyah, *Characters and cohomology of finite groups*, Publ. Math. IHES 9 (1961), 23-64.

[2] M.F. Atiyah, *K − theory*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley, 1989.

[3] M.F. Atiyah and F. Hirzebruch, *Vector bundles and homogeneous spaces*, Proceedings of Symposia of Amer. Math. Soc. 3 (1961), 7-38.

[4] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[5] P. Baum and A. Connes, *Chern character for discrete groups*, in : A Fête of Topology, papers dedicated to Itiro Tamura (Academic Press, 1988), 163-232.

[6] D.J. Benson, *Representations and cohomology II*, Cambridge Studies in Advanced Math. vol. 31, Cambridge Univ. Press, 1991.

[7] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[8] D. Husemoller, *Fibre bundles*, (First edition), McGraw-Hill, 1966.

[9] H. Inassaridze, *Algebraic K − theory*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[10] J.P. May, *Stable algebraic topology and stable topological algebra*, Bull. London Math. Soc. 30 (1998), 225-234.

[11] D. Quillen, *The Adams conjecture*, Topology 19 (1971), 67-80.

[12] D. Quillen, *On the cohomology and K − theory of the general linear groups over a finite field*, Ann. Math. 96 (1972), 552-586.

[13] D. Quillen, *Higher algebraic K − theoy I*, Springer Lecture Notes in Math. 341 (1973), 77-139.

[14] D.L. Rector, *Modular characters and K − theory with coefficients in a finite field*, J. Pure Applied Alg. 4 (1974), 137-158.

[15] G. Segal, *Equivariant K − theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 34 (1968), 129-151.

[16] J. Thévenaz, *Equivariant K − theory and Alperin's conjecture*, J. Pure Applied Alg. 85 (1993), 185-202.

[17] C.B. Thomas, *Characteristic classes and the cohomology of finite groups*, Cambridge Studies in Ad. Math. 9, Cambridge Univ. Press, 1986.

[18] C.B. Thomas, *Modular representations and the cohomology of finite groups*, Topology Appl. 25 (1987), 193-201.